

Міністерство освіти і науки України

Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна

Кафедра прикладної математики

“ЗАТВЕРДЖУЮ”

Декан факультету
математики і інформатики

Григорій ЖОЛТКЕВИЧ

“29” серпня 2024 р.

РОБОЧА ПРОГРАМА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

Теорія міри та інтеграла

рівень вищої освіти _____перший (бакалаврський) рівень_____

галузь знань _____11 – Математика та статистика_____

спеціальність _____113 Прикладна математика_____

освітня програма _____Прикладна математика_____

спеціалізація _____

вид дисципліни _____обов'язкова_____

факультет _____математики і інформатики_____

2024 / 2025 навчальний рік

Програму рекомендовано до затвердження Вченою радою факультету математики і інформатики

“27” серпня 2024 року, протокол № 8

РОЗРОБНИКИ ПРОГРАМИ: **Фардигола Лариса Василівна**, доктор фіз.-мат. наук, професор, професор закладу вищої освіти кафедри прикладної математики.

Програму схвалено на засіданні кафедри прикладної математики
Протокол від “26” серпня 2024 року № 8

Завідувач кафедри прикладної математики

Валерій КОРОБОВ

Програму погоджено з гарантом
освітньо-професійної програми «Прикладна математика»

Гарант освітньо-професійної програми «Прикладна математика»

Сергій ПОСЛАВСЬКИЙ

Програму погоджено науково-методичною комісією
факультету математики і інформатики

Протокол від “27” серпня 2024 року № 1

Голова науково-методичної комісії факультету математики і інформатики

Євген МЕНЯЙЛОВ

ВСТУП

Програма навчальної дисципліни «**Теорія міри та інтеграла**» складена відповідно до освітньо-професійної програми підготовки бакалавра спеціальності 113 Прикладна математика

1. Опис навчальної дисципліни

1.1. **Мета викладання** навчальної дисципліни:

Ознайомлення студентів із сучасною теорією міри та інтеграла.

1.2. **Основні завдання** вивчення дисципліни:

Навчити студентів теоретичним основам та практичним навичкам в галузі сучасної теорії міри та інтеграла.

1.2.1. *Формування наступних інтегральної та загальних компетентностей*

ІК01. Здатність розв'язувати складні спеціалізовані задачі та практичні проблеми прикладної математики у професійній діяльності або у процесі навчання, що передбачає застосування математичних теорій та методів і характеризується комплексністю та невизначеністю умов.

ЗК06. Здатність до абстрактного мислення, аналізу та синтезу.

1.2.2. *Формування наступних фахових компетентностей*

ФК01. Здатність використовувати й адаптувати математичні теорії, методи та прийоми для доведення математичних тверджень і теорем.

ФК02. Здатність виконувати завдання, сформульовані у математичній формі.

ФК17. Здатність розуміти математичні доведення, запропонувати оригінальні доведення, встановлювати їх правильність і отримувати висновки.

1.3. **Кількість кредитів:** 4

1.4. **Загальна кількість годин:** 120

1.5. Характеристика навчальної дисципліни	
Обов'язкова	
Денна форма навчання	Заочна (дистанційна) форма навчання
Рік підготовки	
3-й	
Семестр	
5-й	
Лекції	
32 год.	
Практичні, семінарські заняття	
32 год.	
Лабораторні заняття	
–	
Самостійна робота	
56 год.	
у тому числі індивідуальні завдання	
10 год.	

1.6. Заплановані результати навчання

У результаті вивчення даного курсу студент повинен

знати:

- Означення та властивості півкільця, кільця, півалгебри, алгебри, σ -кільця, σ -алгебри, монотонного класу множин та класів множин, породжених ними.
- Означення та властивості міри.
- Схему побудови та властивості абстрактної зовнішньої міри, міри Лебега на прямій та в \mathbb{R}^m , міри Лебега-Стілтєса на прямій.
- Означення та властивості вимірних відображень та функцій.
- Означення та властивості інтеграла Лебега на прямій та в \mathbb{R}^m , а також інтеграла Лебега-Стілтєса на прямій.
- Основні теореми про граничний перехід під знаком інтеграла Лебега.
- Означення та властивості зарядів, розклади Жордана та Гана. Поняття абсолютної неперервності та сингулярності, теорему Радона-Нікодіма
- Поняття вимірних множин та функцій на добутку просторів, добуток мір, теорему Фубіні.

вміти:

- Визначати належність функцій до важливих класів множин, досліджувати властивості класів множин.
- Визначати вимірність та міру множини.
- Визначати належність функцій до класів вимірних функцій.
- Визначати належність функцій до класу функцій, вимірних за Лебегом.
- Порівнювати інтеграли Рімана та Лебега.
- Оцінювати інтеграл Лебега та вміти користуватися теоремами про граничний перехід під знаком інтеграла Лебега.

Згідно з вимогами освітньо-професійної програми студенти повинні досягти таких програмних результатів навчання:

РН02. Володіти основними положеннями та методами математичного, комплексного та функціонального аналізу, лінійної алгебри та теорії чисел, аналітичної геометрії, теорії диференціальних рівнянь, зокрема рівнянь у частинних похідних, теорії ймовірностей, математичної статистики та випадкових процесів, чисельними методами.

РН21. Демонструвати розуміння загальних принципів побудови математичних теорій, основних понять логіки, уміти формулювати та доводити математичні твердження.

РН22. Уміти отримувати змістовні висновки, наводити та аналізувати приклади і контрприкладів, перевіряти і обґрунтовувати правильність застосованих міркувань і отриманих розв'язків.

2. Тематичний план навчальної дисципліни

Розділ 1. Класи множин та функції множин

Тема 1. Основні класи множин.

Тема 2. Породжені класи множин.

Розділ 2. Функції множин та міри.

Тема 1. Функції множин.

Тема 2. Міри.

Тема 3. Продовження міри. Міра Лебега та Лебега-Стілтєса.

Розділ 3. Вимірні відображення та функції

Тема 1. Вимірні відображення.

Тема 2. Борелеві функції та функції вимірні за Лебегом.

Тема 3. Властивості вимірних функцій.

Тема 4. Типи збіжності та зв'язок між ними.

Розділ 4. Інтеграл Лебега

Тема 1. Визначення та елементарні властивості інтеграла Лебега.

Тема 2. Властивості інтеграла Лебега.

Тема 3. Основні теореми про граничний перехід під знаком інтеграла Лебега.

Тема 4. Порівняння інтегралів Рімана та Лебега.

Тема 5. Інтеграл Лебега-Стілтєсса.

Розділ 5. Інтеграл Лебега, які залежать від параметра

Тема 1. Неперервна залежність інтеграла Лебега від параметра.

Тема 2. Диференційовна залежність інтеграла Лебега від параметра.

Розділ 6. Заряди та абсолютна неперервність

Тема 1. Заряди. Розклади Гана та Жордана.

Тема 2. Абсолютна неперервність та сингулярність. Теорема Радона-Нікодіма.

Розділ 7. Інтегрування на добутку просторів

Тема 1. Вимірні множини в добутку просторів.

Тема 2. Вимірні функції на добутку просторів та добуток мір.

Тема 3. Теорема Фубіні.

3. Структура навчальної дисципліни

Назви розділів і тем	Кількість годин											
	Денна форма						Заочна форма					
	Усього го	у тому числі					Усього о	у тому числі				
л		п	лаб	інд	ср	л		п	лаб	інд	ср	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Розділ 1. Класи множин та функції множин												
Тема 1	4	2	2									
Тема 2	6	1	2			3						
Разом за розділом 1	10	3	4			3						
Розділ 2. Функції множин та міри												
Тема 1	4	2	2									
Тема 2	6	1	2			3						
Тема 3	12	4	2			6						
Контрольна робота	2		2									
Разом за розділом 2	24	7	8			9						
Розділ 3. Вимірні відображення та функції												
Тема 1	2	1	1									
Тема 2	2	1	1									
Тема 3	9	1	2			6						
Тема 4	17	2	2			13						
Разом за розділом 3	30	5	6			19						
Розділ 4. Інтеграл Лебега												
Тема 1	3	2	1									
Тема 2	3	2	1									
Тема 3	6	1	2			3						
Тема 4	2	1	1									
Тема 5	5	1	1			3						
Індивідуальне завдання	10					10						
Разом за розділом 4	29	7	6			16						

Розділ 5. Інтеграл Лебега, які залежать від параметра												
Тема 1	2	1	1									
Тема 2	8	1	1			6						
Разом за розділом 5	10	2	2			6						
Розділ 6. Заряди та абсолютна неперервність												
Тема 1	2	1	1									
Тема 2	3	2	1									
Разом за розділом 6	5	3	2									
Розділ 7. Інтегрування на добутку просторів												
Тема 1	5	1	1			3						
Тема 2	3	2	1									
Тема 3	4	2	2									
Разом за розділом 7	12	5	4			3						
Усього годин	120	32	32			56						

4. Теми семінарських (практичних, лабораторних) занять

№ з/п	Назва теми	Кількість годин
1	Основні та породжені класи множин.	4
2	Функції множин, міри.	4
3	Продовження міри.	3
4	Вимірні відображення та функції.	3
5	Контрольна робота: Теорія міри	2
6	Інтеграл Лебега та теореми про граничний перехід під знаком інтеграла.	4
7	Інтеграл Лебега, що залежать від параметра	4
8	Заряди.	4
9	Інтеграл Лебега на добутку просторів.	4
	Разом	32

5. Завдання для самостійної роботи

№ з/п	Види, зміст самостійної роботи	Кількість годин
1	Виконання домашнього завдання за темою «мінімальні класи множин».	5
2	Виконання домашнього завдання за темою «прикладні міри».	5
3	Виконання домашнього завдання за темою «єдиність продовження міри».	5
4	Виконання домашнього завдання за темою «міра Лебега в \mathbb{R}^m ».	4
5	Виконання домашнього завдання за темою «прикладні вимірні відображення».	4
6	Виконання домашнього завдання за темою «суперпозиція вимірних відображень».	4
7	Виконання домашнього завдання за темою «інтеграл Лебега».	5
8	Індивідуальне завдання: Вимірні функції та інтеграл Лебега	12
9	Виконання домашнього завдання за темою «диференційовність інтеграла Лебега за параметром».	4
10	Виконання домашнього завдання за темою «заміна змінної в інтегралі Лебега».	4
11	Виконання домашнього завдання за темою «вимірні множини в добутку просторів».	4
	Разом	56

6. Індивідуальне завдання

Тема індивідуального завдання: «Вимірні функції та інтеграл Лебега».

7. Методи навчання

Частково-пошукові і проблемні лекції, пояснення, пояснювально-ілюстративні методи при проведенні практичних занять, консультації.

8. Методи контролю

Перевірка виконання домашніх робіт, контрольної роботи та індивідуального завдання. Проведення екзамену.

9. Схема нарахування балів

Поточний контроль, самостійна робота, індивідуальні завдання					Екзамен	Сума
Розділи 1-3	Розділи 4-7	Контрольна робота	Індивідуальне завдання	Разом		
18	18	12	12	60	40	100

Для допуску до складання підсумкового контролю (екзамену) здобувач вищої освіти повинен набрати не менше 10 балів з навчальної дисципліни під час поточного контролю, самостійної роботи, індивідуального завдання.

Критерії оцінювання навчальних досягнень

Поточний контроль: бали нараховуються за виконання домашніх завдань і активність під час практичних занять.

Контрольна робота (містить 3 завдання, максимальна оцінка 12 балів):

1. У завданні 1 максимальна оцінка 3 бали (пункт (i) — 2 бали, пункт (ii) — 1 бал):
 - (i) (1) дано неправильну відповідь – 0 балів;
(2) дано правильну відповідь, але не обґрунтовано її — 1 бал;
(3) дано правильну відповідь і обґрунтовано її — 2 бали.
 - (ii) (1) дано неправильну відповідь, або не обґрунтовано її – 0 балів;
(2) дано правильну відповідь і обґрунтовано її — 1 бал.
2. У завданні 2 максимальна оцінка 3 бали:
 - (1) дано неправильну відповідь – 0 балів;
(2) дано правильну відповідь, але не повністю обґрунтовано її — 1–2 бали;
(3) дано правильну відповідь і обґрунтовано її — 3 бали.
3. У завданні 3 максимальна оцінка 6 балів (пункт (i) — 2 бали, пункт (ii) — 2 бали, пункт (iii) — 2 бали):
 - (i) (1) дано неправильну відповідь – 0 балів;
(2) дано правильну відповідь, але не обґрунтовано її — 1 бал;
(3) дано правильну відповідь і обґрунтовано її — 2 бали;
 - (ii) (1) дано неправильну відповідь – 0 балів;
(2) дано правильну відповідь, але не обґрунтовано її — 1 бал;
(3) дано правильну відповідь і обґрунтовано її — 2 бали;
 - (iii) (1) дано неправильну відповідь – 0 балів;
(2) дано правильну відповідь, але не обґрунтовано її — 1 бал;
(3) дано правильну відповідь і обґрунтовано її — 2 бали;

Індивідуальне завдання (містить 3 завдання, максимальна оцінка 12 балів):

1. У завданні 1 максимальна оцінка 4 бали (пункт (i) — 2 бали, пункт (ii) — 2 бали):
 - (i) (1) дано неправильну відповідь – 0 балів;
(2) дано правильну відповідь, але не обґрунтовано її — 1 бал;

- (3) дано правильну відповідь і обґрунтовано її — 2 бали.
- (ii) (1) дано неправильну відповідь — 0 балів;
 (2) дано правильну відповідь, але не обґрунтовано її — 1 бал;
 (3) дано правильну відповідь і обґрунтовано її — 2 бали.
2. У завданні 2 максимальна оцінка 4 бали:
 (1) дано неправильну відповідь — 0 балів;
 (2) дано правильну відповідь, але не повністю обґрунтовано її — 1–2 бали;
 (3) дано правильну відповідь і обґрунтовано її — 3–4 бали.
3. У завданні 3 максимальна оцінка 4 бали:
 (1) дано неправильну відповідь — 0 балів;
 (2) дано правильну відповідь, але не повністю обґрунтовано її — 1–2 бали;
 (3) дано правильну відповідь і обґрунтовано її — 3–4 бали.

Іспит (білет містить 6 завдань, максимальна оцінка 40 балів):

1. У завданні 1 максимальна оцінка 12 балів:
 (а) твердження сформульовано з помилками, обґрунтування відсутнє — 0–5 балів;
 (б) твердження сформульовано вірно, обґрунтування відсутнє — 6 балів;
 (в) твердження сформульовано вірно та наведено менше половини обґрунтування — 7–8 балів;
 (г) твердження сформульовано вірно та в обґрунтуванні зроблено суттєві помилки — 9–10 балів;
 (д) твердження сформульовано вірно та в обґрунтуванні можливі незначні помилки — 11–12 балів.
2. У завданнях 2–5 максимальна оцінка 5 балів:
 (а) твердження або означення сформульовано з помилками, приклади відсутні — 0–2 балів;
 (б) твердження або означення сформульовано вірно, приклади відсутні — 3 балів;
 (в) твердження або означення сформульовано вірно, наведено приклади — 4–5 балів;
3. У завданні 6 максимальна оцінка 8 балів:
 (а) наведено лише схему обчислення (дослідження) або воно лише розпочато — 0–4 бала;
 (б) наведено розв'язання або дослідження, але зроблено суттєві помилки — 5–6 балів;
 (в) наведено розв'язання або дослідження, можливі незначні помилки, які не впливають на характер обчислення або дослідження — 7–8 балів.

Бали, отримані за виконання всіх завдань, сумуються (максимальна кількість — 40 балів) і додаються до балів, отриманих за практичні завдання. Максимальна сума — 100 балів. Оцінка виставляється за стандартною шкалою оцінювання.

Шкала оцінювання (чотирирівнева)

Сума балів за всі види навчальної діяльності протягом семестру	Оцінка
90 – 100	відмінно
70 – 89	добре
50 – 69	задовільно
1 – 49	незадовільно

10. Рекомендована література Основна література

1. Радченко В.М. Теорія міри та інтеграла. – Київ: Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет", 2012. –144 с.
2. Михалін Г.О. Елементи теорії інтеграла та міри. – Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова, 2000 –248 с.
3. Дороговцев А.Я. та ін. Завдання до практичних занять з теорії міри та інтеграла. – Київ: Вид-во "Київський університет", 2003. – 89 с.

Допоміжна література

4. Дороговцев А.Я. Математичний аналіз. Ч. 1 – К.: Либідь, 1993. – 320 с.
5. Дороговцев А.Я. Математичний аналіз. Ч. 2 – К.: Либідь, 1994. – 304 с.